

20 Критерии предкомпактности в C, L_p, l_p

В l_p : здесь "живут" эл-ты вида $x = (x_1, x_2, \dots)$
 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$; $\|x\|_{l_p} = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$, $p \geq 1$
 А/ пр-ва справедливо нер-во Гельдера: $x, y \in l_p$
 $\Rightarrow \|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ ($xy = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n, \dots)$). Также справедливо нер-во Меньковского: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\square$ K -компакт. мн-во

1) $C(K)$ - мн-во всех непр. на $K \subseteq \mathbb{R}^n$; $d(f, g) = \max_{x \in K} |f(x) - g(x)|$
 Сд-ть $\Rightarrow$ равномер. сд-ть

↓ (Арцела - Аскали) $E \subset C(K)$ предкомп. $\Leftrightarrow$ E опр. и равностеп. непр.

Р. опр.: $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in K$
 $\forall \varepsilon > 0, \forall f \in E, \exists \delta > 0: |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$
 $\Leftrightarrow$ (м. 2^я курс. // $\Rightarrow$ опр. и равностеп. непр-ть $\Rightarrow$ $\exists$ равномер. сд-ся и/посл-ть //)
 $\Rightarrow$ Предкомп. $\Rightarrow \exists$ пот. E -сть $\forall \varepsilon > 0, E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B(p_k, \varepsilon)$
 $f_k(x)$ непр. на $K \Rightarrow f_k$ равн. непр. на $K \Rightarrow$
 $f(x)$ равностеп. непр. на K . Ч.Т.Д. ■

2) **↓** (Рисса) мн-во $E \subset L_p(K)$ предкомп. в $L_p \Leftrightarrow$ опр. в L_p и равн. непр. в L_p , т.е. $\exists M > 0: \|f\|_{L_p} \leq M$ и $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |\Delta| < \delta \Rightarrow \|f(\cdot + \Delta) - f(\cdot)\|_{L_p} < \varepsilon, \forall f \in E$ ($f=0$ вне K)

⇒ Аналогично м. доказать - обратное.

⇐ Пусть $\|f\|_{L_p} < M \forall f \in E$, и $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: как только

$$|\Delta| < \delta, \text{ то } \|f(\cdot + \Delta) - f\| < \varepsilon \quad \forall f \in E, f \equiv 0 \text{ на } E.$$

Введем $w(z) = \begin{cases} c(1-z), & 0 < z < 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$, где c такое,

$$\text{что } 1 = \int_{\mathbb{R}^n} w(|x|) dx = \{\text{сф. к-метр}\} = c |S_n| \int_0^1 (1-z) z^{n-1} dz =$$

$$= c \cdot |S_n| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \Rightarrow c = \frac{n(n+1)}{|S_n|}. \text{ Введем } w_p(|x|) = \frac{1}{p} w\left(\frac{|x|}{p}\right)$$

(Легко видеть, что $\int_{\mathbb{R}^n} w_p(|x|) dx = 0$), $w_p(|x|) = 0$ при $|x| > p$.

Для каждой f ставим в соответствие $f_p(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) w_p(|x-y|) dy$ (свертку f). Покажем, что это -

ε -сеть приближения, $f \in E$. Проверим утверждение:

$$f_p(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) w_p(|x-y|) dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) w_p(|x-y|) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (f(y) - f(x)) w_p(|x-y|) dy = \int_{\mathbb{R}^n} [f(x+z) - f(x)] w_p(|z|) dz$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f_p(x) - f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} [f(x+z) - f(x)] w_p(|z|) dz \right|^p dx$$

$$\leq \{\text{нр-ло Гельфанда}\} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+z) - f(x)|^p w_p(|z|) dz \left(\int_{\mathbb{R}^n} w_p(|z|) dz \right)^{p/q} dx =$$

$$\stackrel{\text{т. Фубини}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+z) - f(x)|^p dx \cdot w_p(|z|) dz \cdot \forall \varepsilon > 0$$

при $p < \delta \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+z) - f(x)|^p dx < \varepsilon^p \quad \forall f \in E$. Уточню,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_p(x) - f(x)|^p dx \leq \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^n} w_p(|z|) dz = \varepsilon^p \quad \forall f \in E,$$

т.е. $\|f - f_p\|_{L_p} < \varepsilon$. Это гарантировано ε -сетью!

1-я предзнакоитность $\{f_p(x)\}$. Фиксируем p ;
покажем, что $f_p(x)$ - p.ср. и p.непр. Равномерная

огражденность: $|f_p(x)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \omega_p(|x-y|) dy \right| =$

$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x+z) \omega_p(|z|) dz \right| \leq \{ \text{нр-во Лиувилля} \} \leq$

$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+z)|^p dz \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\omega_p(z)|^q dz \right)^{1/q} =$

$= C(p) \|f\|_{L_p} \leq M \cdot C(p) \quad \forall f \in E$ Равномерная

непр-ть: $|f_p(x+\Delta) - f_p(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x+\Delta+z) - \right.$

$\left. - f(x+z)) \omega_p(|z|) dz \right| \leq \{ \text{нр-во Лиувилля} \} \leq$

$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+\Delta+z) - f(x+z)|^p dz \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\omega_p(|z|)|^q dz \right)^{1/q} =$

$= C(p) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y+\Delta) - f(y)|^p dy \right)^{1/p} < \varepsilon$ в силу
равномерной непр-ти.

$\Rightarrow \{f_p(x)\}$ предкомп. в $C(K)$. Но если $f_n \Rightarrow f$

то $\|f_n - f\|_{L_p} \rightarrow 0 \Rightarrow \{f_p(x)\}$ предк. в $L_p \Rightarrow E$ -
предкомп. в L_p . Ч.Т.Д. ■

3) $\Downarrow$ $f \in C \text{ } l_p$ предкомп. $\Leftrightarrow$ 1) $\exists M > 0: \|x\|_{l_p} \leq M, \forall x \in E$;
2) $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \|R_N(x)\|_{l_p} < \varepsilon, \forall x \in E$
(где $R_N(x) = (0, \dots, 0, x_{N+1}, 0, \dots)$)

1) Необходимость. E -предкомпактно $\Rightarrow \exists M: \|x\|_{\ell_p} < M$
 $\forall x \in E$ (убо предкомп. $\Rightarrow$ равн. ограниченность) $\forall \varepsilon > 0$
 $\exists$ конечная ε -сеть $E \subset \bigcup_{k=1}^n B(y^k, \varepsilon) \quad \|y^k\|_{\ell_p} < \infty$

$\Rightarrow \exists N: \sum_{n=N+1}^{\infty} |y_n^k|/p < \varepsilon' \quad \forall k=1, \dots, n$. Т.к. их конечное
 число, то можно выбрать на всех: $\|R_N y^k\|_{\ell_p} < \varepsilon$.

$\forall x \in E: \exists B(y^k, \varepsilon) \ni x \Rightarrow \|x - y^k\|_{\ell_p} < \varepsilon \Rightarrow$
 $\|R_N(x) - R_N y^k\| < \varepsilon'; \quad \|R_N(x)\| - \|R_N y^k\| \leq \|R_N(x) -$
 $- R_N y^k\| \Rightarrow \|R_N x\| < 2\varepsilon \quad \forall x \in E.$

2) Достаточность. $\{P_N x\}$ начисо x ; это ε -сеть,
 убо $\|x - P_N x\| = \|R_N(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \in E$. По существу,
 это конечно-мерные пр-ва; $\|P_N x\|_{\ell_p} \leq \|x\|_{\ell_p} \leq M \quad \forall x \in E$.
 $P_N x$ -предкомпактные $\Rightarrow E$ -предкомпактно. Ч.Т.Д. ■